ÉTUDE D'UNE FONCTION 1

On présente les premières étapes de l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle.

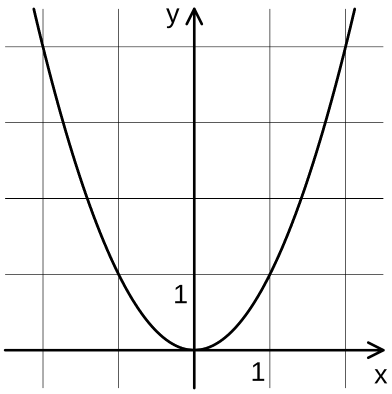
1 ENSEMBLE DE DÉFINITION

Définition :

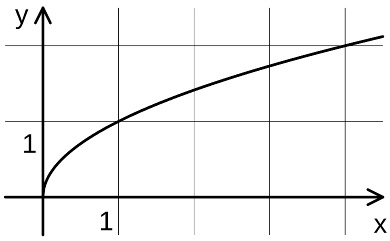
> L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels f(x) existe. On le note souvent D_f .

On dit aussi "domaine de définition".

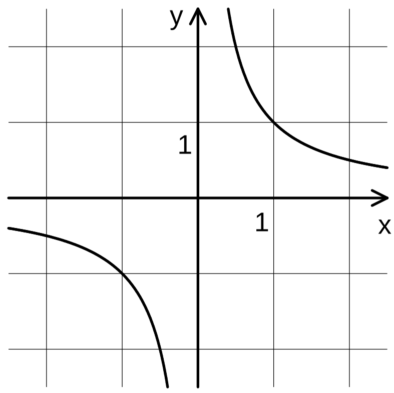
Exemples :



$f(x) =$



$g(x) =$



$h(x) =$

La fonction f est définie pour tout x : $D_f =$

De même, l'ensemble de définition de toute fonction polynôme est

La fonction g n'est pas définie pour : $D_g =$

Pour qu'une racine carrée existe il faut que

La fonction h n'est pas définie pour : $D_h =$

De même, toute fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ privé des valeurs de x qui

2 DOMAINE D'ÉTUDE

Il n'est pas toujours nécessaire d'étudier la fonction sur la totalité de son ensemble de définition.

Parité :

> Une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f , est **paire** si et seulement si pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) =$

> Une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f , est **impaire** si et seulement si pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) =$

La courbe représentative d'une fonction paire (par exemple $x \mapsto$) est symétrique par rapport à

La courbe représentative d'une fonction impaire (par exemple $x \mapsto$) est symétrique par rapport à

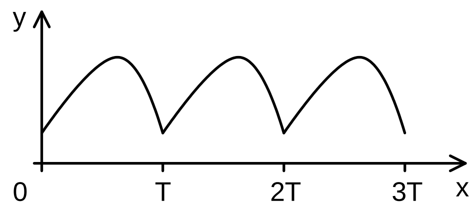
Dans les deux cas, on peut réduire le domaine d'étude à la partie positive de D_f.

Périodicité :

> Une fonction f est dite **périodique**, de **période** T, si T est le plus petit réel strictement positif tel que pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et $f(x+T) =$

Par exemple, les fonctions et sont périodiques, de période

Une fonction périodique s'étudie sur un intervalle dont la longueur est égale à la période. La courbe représentative complète de f s'obtient alors par translations répétées du motif obtenu sur l'intervalle d'étude.

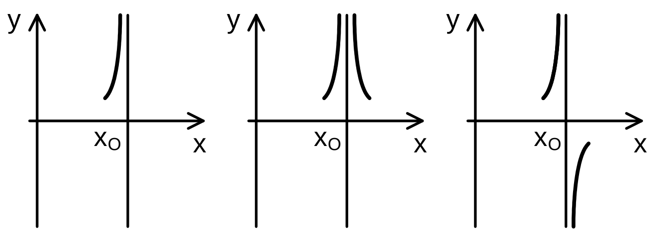


3 LIMITES AUX BORNES ET BRANCHES INFINIES

La détermination des limites aux bornes de l'ensemble de définition permet de déterminer si la courbe représentant f comporte ou non des branches infinies.
Dans cette partie, la notation ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$.

Asymptote verticale :

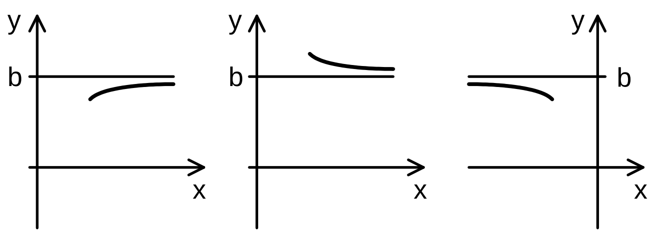
> Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, alors la courbe représentant f admet comme asymptote verticale la droite d'équation



C'est le cas de $f(x) =$ en $x_O =$. Les limites en x_O^{+} et en x_O^{-} peuvent être différentes.

Asymptote horizontale :

> Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, alors la courbe représentant f admet comme asymptote horizontale la droite d'équation



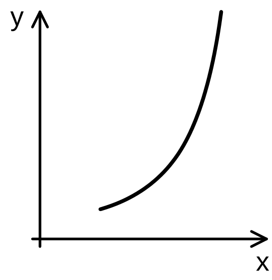
C'est le cas de $x \mapsto$ en $+\infty$ et $-\infty$ avec $b =$

Limite infinie à l'infini :

Quand $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, la courbe présente une **branche parabolique** ou une **asymptote oblique**. Pour le déterminer, il faut commencer par déterminer $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

Cas 1 :

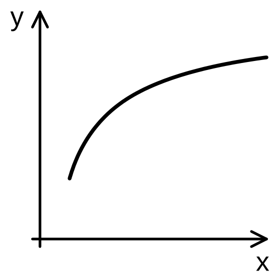
Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty$ alors la courbe représentant f admet une **branche parabolique verticale**



On peut dire que f tend vers l'infini beaucoup que $x \mapsto x$
C'est le cas de $f(x)=$

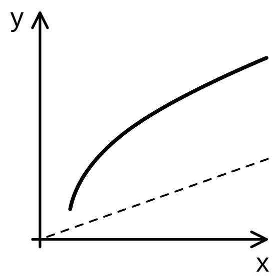
Cas 2 :

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ alors la courbe représentant f admet une **branche parabolique horizontale**



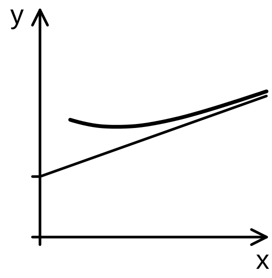
On peut dire que f tend vers l'infini beaucoup que $x \mapsto x$
C'est le cas de $f(x)=$

Cas 3 : Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ où a est un réel non nul, alors on ne peut pas conclure tout de suite, il faut d'abord déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax$:



Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$ alors la courbe représentant f admet une **branche parabolique de direction a**

C'est le cas de $f(x)=x+\sqrt{x}$ avec $a=$



Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$ alors la courbe représentant f admet comme **asymptote oblique** la droite d'équation $y=ax+b$

C'est le cas de $f(x)=x+1/x$ avec $a=$ et $b=$

Récapitulatif de la détermination de la nature d'une branche infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	b	asymptote horizontale $y=b$
	∞	→ voir ci-dessous

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$	0	branche parabolique horizontale
	∞	branche parabolique verticale
	$a\neq 0$	

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax$	b	asymptote oblique $y=ax+b$
	∞	branche parabolique de direction a