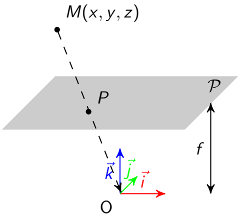
Mathématiques pour la synthèse d'images

Jean-Yves Didier

Université d'Evry



1. Coordonnées homogènes
   - Formalisation
   - Transformations
   - Projections

2. Représentation des rotations

3. Calcul d'illumination
   - Modèle
   - Calcul
   - Interpolation

1. Coordonnées homogènes
   - Formalisation
   - Transformations
   - Projections
2. Représentation des rotations
3. Calcul d'illumination
   - Modèle
   - Calcul
   - Interpolation

Les coordonnées homogènes

Un outil pour les espaces projectifs

Un outil qui :

- Permet de faire des calculs dans un **espace projectif** (L'image calculée par une carte graphique est une **projection** 2D d'une scène 3D) ;
- Caractérise les transformations de l'espace ;
- Est utilisé par les cartes graphiques et les APIs 3D associées OpenGL et Direct3D sous sa forme matricielle (calcul linéaire donc rapide).

En pratique ...

Représentation

Pour un espace en 3D, représentées par un vecteur à 4 dimensions :

$$A = (x_A, y_A, z_A, w_A)$$

Propriété : l'égalité

$A = (x_A, y_A, z_A, w_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B, w_B)$ sont égaux ssi
$\exists k \in \mathbb{R}$ tq $x_A = k.x_B$, $y_A = k.y_B$, $z_A = k.z_B$ et $w_A = k.w_B$.

Propriété : la somme

C'est la somme de chaque coordonnée prise une à une.

Propriété : la multiplication par un scalaire

Chaque coordonnée est multipliée par le scalaire.

Des coordonnées homogènes aux coordonnées 3D

Dans le sens 3D – coordonnées homogènes

Ajouter $w = 1$.

Dans le sens coordonnées homogènes – 3D

Normaliser le résultat en divisant toutes les coordonnées par w (si non nul) puis ôter la coordonnée en w.

Exemples

$$(1, 2, 3)_3 \equiv (1, 2, 3, 1)_4$$

$$(2, 4, 6, 2)_4 \equiv (1, 2, 3, 1)_4$$

$$(2, 4, 6, 2)_4 \equiv (1, 2, 3)_3$$

Les coordonnées homogènes

Appliquer une transformation

Pour **appliquer une transformation** sur un point p – ce qui l'amène au point q, multiplier le vecteur de ce point par une matrice représentant une transformation T. $q = Tp$.

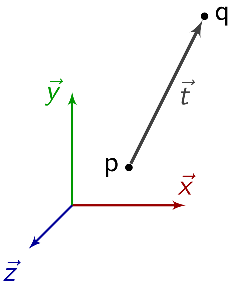
Remarque

Pour des transformations dans un espace à 3 dimensions, les matrices seront de taille 4×4.

Les translations

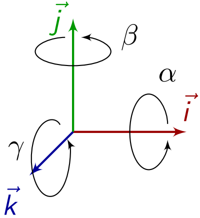
Translation de vecteur $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)'$.
Matrice exprimée sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Les rotations

Matrice de la forme : $M = \begin{bmatrix} R_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$



Rotations élémentaires – pour repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Angle α autour de $\vec{i}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos_\alpha & -\sin_\alpha & 0 \\ 0 & \sin_\alpha & \cos_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Angle β autour de $\vec{j}$

$$\begin{bmatrix} \cos_\beta & 0 & \sin_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin_\beta & 0 & \cos_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Angle γ autour de $\vec{k}$

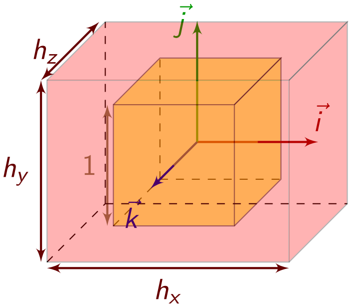
$$\begin{bmatrix} \cos_\gamma & -\sin_\gamma & 0 & 0 \\ \sin_\gamma & \cos_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les homothéties

Matrice de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque :
si $h_x = h_y = h_z$, homothétie
sinon dilatation anisotropique.

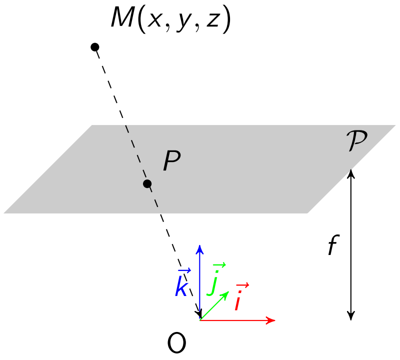


Les projections

La projection perspective

Perspective classique : celle que l'oeil humain perçoit (deux lignes parallèles se rejoignent à l'horizon). Dans le cas d'un plan $(\vec{i},\vec{j})$ situé à une distance f de l'origine suivant $\vec{k}$, la matrice est alors :

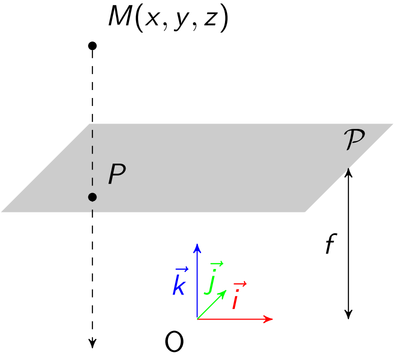
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix}$$



La projection orthographique

Elle correspond à la perspective cavalière. La matrice est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Les manières de représenter une rotation

4 représentations courantes

- Les angles d'Euler ou de Cardan :
  - Utilisation en robotique, aéronautique, ...
- Le format axe-angle ;
  - Utilisation en mécanique.
- Les quaternions :
  - Pour animer de manière fluide.
- Les matrices de rotation :
  - Représentation linéaire « universelle »

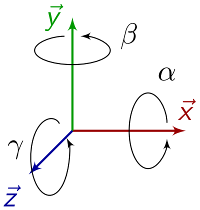
Les angles d'Euler ou de Cardan

Principe

Triplet d'angles de rotation autours des axes élémentaires du repère.

Avantages

- La linéarité ;
- Seulement 3 paramètres.



Inconvénients

- Différentes conventions : angle d'Euler nautiques, aéronautiques, angles de Cardan ;
- Ambigüité de certaines configurations ;
- Rupture de la continuité.

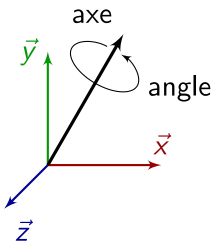
Le format axe-angle

Principe

Une rotation est donnée par un axe de rotation instantanné et un angle (4 paramètres).

Avantage

- Peut se réduire à 3 paramètres.



Inconvénients

- La non-linéarité ;
- Ambigüité de certaines configurations.

Les quaternions

Principe

Généralisation des nombres complexes à 4 composantes.

Avantage

- La préservation de la continuité.

$$Q = w + x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Inconvénients

- La non-linéarité ;
- Ambigüité de certaines configurations.

Les matrices de rotation

Principe

Une matrice de taille 3×3 représente la rotation.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Avantages

- La non-ambigüité ;
- La linéarité ;

Inconvénients

- Le nombre de paramètres (9 !) ;
- La rupture de la continuité.

Les rotations : synthèse

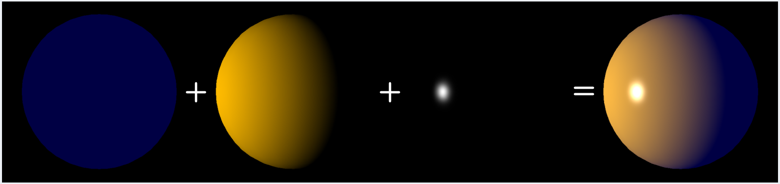
	Euler	Axe-angle	Quaternions	Matrice
Non-ambigüité	Non	Non	Non	Oui
Linéarité	Oui	Non	Non	Oui
Continuité	Non	Non	Oui	Non
Compacité	3	3 (4)	4	9

Modèle d'illumination (1/3)

Calcul d'illumination

Calcul de la couleur d'un sommet d'une primitive géométrique en fonction de ses propriétés intrinsèques et de celles de la lumière environnante.

Composition de trois couleurs



ambiante diffuse spéculaire illumination

Modèle d'illumination (2/3)

Propriétés communes (objet et source de lumière)

- La couleur de diffusion ;
- La couleur spéculaire ;
- La couleur émise ;
- La couleur ambiante.

Propriétés intrinsèques aux objets

La normale à la surface au sommet considéré.

Modèle d'illumination (3/3)

Propriétés propres à la lumière environnante

- Type de source lumineuse :
  ponctuelle, directionnelle, spot, etc.
- Position de la source de lumière ;
- Direction de la lumière (suivant type) ;
- Autres caractéristiques pour le spot.

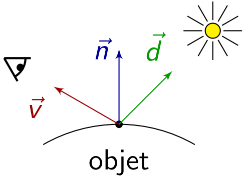
Modèle hybride

Modèle basé sur l'observation (modèle empirique) et pas que sur des équations physiques !

Calcul d'illumination (1/2)

Notations

C_{xf}	couleur finale calculée
C_x	couleur intrinsèque de l'objet
I_x	couleur intrinsèque de la lumière
$\vec{n}$	normale à la surface de l'objet
$\vec{d}$	direction de la source de lumière
$\vec{v}$	direction du point de vue



Conventions

- Vecteurs normalisés : $||\vec{n}|| = ||\vec{d}|| = ||\vec{v}|| = 1$
- Intensité lumineuse bornée : $0 \leq C_x, I_x \leq 1$

Calcul d'illumination (2/2)

Éclairement ambiant

$$C_{af} = C_a.I_a$$

Éclairement diffus

(modèle lambertien)

$$C_{df} = C_d.I_d.(\vec{n} \bullet \vec{d})$$

Éclairement spéculaire

(modèle de Phong)

$$C_{sf} = C_s.I_s.(\vec{v} \bullet \vec{r})^\alpha$$

$\vec{r} = 2.(\vec{n} \bullet \vec{d})\vec{n} - \vec{d}$

α : brillance de l'objet.

Eclairement final

$$C_f = C_{af} + C_{df} + C_{sf}$$

Remarque

Fonctionne aussi lorsque la couleur est décomposée suivant ses trois couleurs primaires : rouge, vert et bleu.

L'interpolation de couleurs

Problème

Une carte graphique manipule des **géométries discrètes** (surfaces maillées par des triangles) : comment fait elle pour déterminer la couleur en tout point d'un triangle ?

Solution

Elle réalise une **interpolation** entre les sommets du triangle. Selon la fonction utilisée, trois rendus sont possibles :

- Le rendu « plat »(*flat shading*) ;
- Le rendu de Gouraud (*Gouraud shading*) ;
- Le rendu de Phong (*Phong shading*).

flat shading

Principe

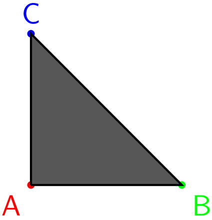
La couleur du triangle est la couleur moyenne des 3 sommets.

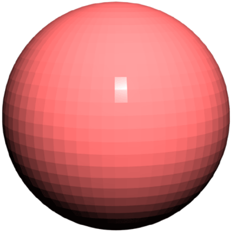
Avantage

Simplicité de mise en oeuvre.

Inconvénient

Rendu non lisse.





Gouraud shading

Principe

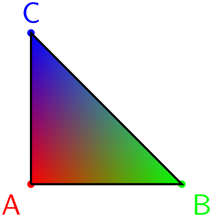
Interpolation des couleurs de chaque sommet en chaque point du triangle (Sur les cartes graphiques depuis 1999).

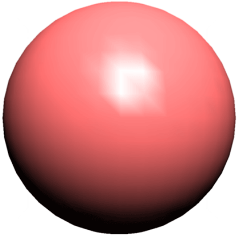
Avantage

- Complexité moyenne ;
- Rendu lisse.

Inconvénient

- Mauvaise restitution des reflets.





Phong shading

Principe

Interpolation des couleurs et des normales (Sur les cartes graphiques depuis 2003).

Avantage

- Rendu visuellement correct.

Inconvénient

- Gourmand en puissance de calcul.