Numération

Ce cours a pour objet de rappeler comment les nombres sont écrits en vue de se familiariser avec les notations binaire et hexadécimale qui sont utilisées dans les processeurs. Les passages d'une base à l'autre sont explicités ainsi que les opérations de bases dans chacune des bases.

I.Représentation des nombres entiers

I.1.Nombres non signés

Base : Nombre qui sert à définir un système de numération. (Robert)

Dans une base quelconque, un nombre entier s'écrit de la façon suivante : $N_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$ avec $\forall i, 0 \le a_i < b$. On note alors : $N_b = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$. Comme $\forall i, 0 \le a_i < b$, il faut b symboles (ou chiffres) pour écrire un nombre en base b.

Dans la notation décimale (base 10, utilisée couramment), nous disposons de 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Un nombre décimal s'écrit donc de la façon suivante : $N_{10} = 7531$ par exemple. Cette notation signifie en fait : $N_{10} = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$.
En binaire (base 2), 2 chiffres suffisent : 0 et 1. Par exemple, en binaire, le nombre $N_2 = 1101$ signifie : $N_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.
En hexadécimal (base 16), il faut 16 symboles. Pour les 10 premiers, ceux de la base 10 sont utilisés. Restent 6 symboles à définir. On prend par convention les 6 premières lettres de l'alphabet. Les chiffres de la base hexadécimale sont donc : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F avec A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15. On écrit alors : $N_{16} = 3D5F$ qui signifie : $N_{16} = 3 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$.

I.2.Nombres signés

Et pour les nombres négatifs ? Il suffit de rajouter un signe devant ! Oui mais dans un processeur, comment fait-on ? On cherche un codage d'un nombre négatif le plus efficace possible. Par exemple, en décimal sur 2 chiffres, on peut coder 100 nombres (Figure I.1).

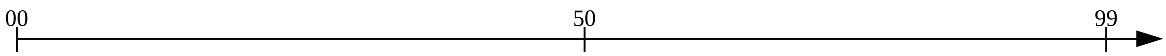

Figure I.1 : *Représentation de 100 nombres avec 2 chiffres décimaux.*

On peut faire plusieurs choix pour coder 50 nombres négatifs et 50 nombres positifs. Par exemple, les 50 premiers sont choisis négatifs et les 50 suivants positifs. Donc le nombre -50 est codé "0", le nombre -1 est codé "49", le nombre 0 est codé "50", le nombre 1 est codé "51", le nombre 49 est codé "99"… Ce choix n'est pas très judicieux : les nombres positifs signés ne ressemblent pas du tout aux nombres positifs non signés. En effet, le nombre 1 est codé "1" dans la première convention et "51" dans la seconde.

Pour éviter cet inconvénient, on convient de noter les nombres 0 à 49 comme des nombres classiques : 0 est représenté par "0", ..., 49 est représenté par "49". On écrit alors les nombres négatifs avec les 50 codes non utilisés : -50 est représenté par "50", -49 est représenté par "51", …, -2 est représenté par "98" et -1 est représenté par "99". Les nombres positifs sont alors simples à lire. Les nombres négatifs quant à eux sont plus difficiles à lire. Mais ce codage apporte un gros avantage. Si l'on effectue l'addition 1+(-1) on a : 1+99=100. Si l'on ne garde que les 2 derniers chiffres (convention de départ), on voit apparaître que 1+(-1)=0. Il en va de même pour tous les nombres définis ainsi.

Exercice : Trouver le codage du nombre -37 et vérifier que 37+(-37)=0.

Comment peut-on trouver facilement le codage d'un nombre négatif ? On commence par calculer le **complément restreint**, noté Cr, du nombre choisi. Il est trouvé en partant du nombre positif et en cherchant pour chaque chiffre le complément pour arriver à 9=10-1. Dans le cas de 37 on obtient : 3→6 et 7→2, soit 62. La somme de ces deux nombres donne : 37+62=99. Pour obtenir 0, il suffit de rajouter 1. On calcule donc le **complément vrai**, Cv, du nombre tel que : Cv=Cr+1. Dans notre cas, 62+1=63 et on retrouve le résultat de l'exercice.

Dans les processeurs, ce codage est utilisé avec une représentation binaire des nombres.

Exercice : Représentation des nombres négatifs en binaire sur 8 chiffres.

- Donner la représentation des nombres positifs et négatifs.
- Calculer le Cv du nombre 1001101 sur 8 chiffres.
- Vérifier que la somme des deux nombres vaut bien (1)00000000.
- Calculer le Cv du Cv. Que remarque-t-on ?

II.Changement de bases

II.1.Hexadécimal ou binaire vers décimal

La conversion vers le décimal est assez simple : il suffit de se reporter à la définition des nombres en binaire ou en hexadécimal. Par exemple, $N_{16} = 3D5F = 3\cdot16^3 + 13\cdot16^2 + 5\cdot16^1 + 15\cdot16^0$ donne la valeur décimale suivante : $N_{10} = 3\cdot4096 + 13\cdot256 + 5\cdot16 + 15\cdot1 = 15711$.

Exercice :

- Donner la valeur décimale des nombres hexadécimaux suivants : 10 (16), 7 (7), D (13), A2D (2605), 234 (564), AFC (2812)…
- Donner la valeur décimale des nombres binaires suivants : 10 (2), 1000 (8), 1010 (A), 110101 (53), 10001101 (141)…

II.2.Décimal vers hexadécimal ou binaire

II.2.1.Soustractions successives

Prenons un exemple. Soit le nombre 745 en décimal à traduire en hexadécimal. On cherche la puissance de 16 la plus grande inférieure à 745. $16^2 = 256$ et $16^3 = 4096$. On conserve donc 16^2. Or, $2\cdot256 = 512$ et $3\cdot256 = 768$. On a alors : $745 - 2\cdot16^2 = 233$. On recommence avec 233. On a : $233 - 14\cdot16^1 = 9$. On peut donc écrire : $745 = 2\cdot16^2 + 14\cdot16^1 + 9\cdot16^0$. Il vient : $(745)_{10} = (2E9)_{16}$.

Exercice : Donner la valeur hexadécimale des nombres décimaux suivants : 32 (20), 64 (80), 256 (100), 255 (FF), 4096 (1000), 951 (3B7), 1425 (591)…

II.2.2.Divisions successives

Reprenons le même exemple. La division entière de 745 par 16 donne : $\frac{745}{16} = 46$ reste 9. On divise le résultat encore par 16 jusqu'à obtenir une valeur inférieure à 16. Ici, on a $\frac{46}{16} = 2$ reste 14. Si l'on fait une dernière division on obtient : $\frac{2}{16} = 0$ reste 2. Il suffit alors de prendre les restes des divisions en ordre inverse. On a alors : $(745)_{10} = (2E9)_{16}$.

Exercices : Donner la valeur hexadécimale des nombres décimaux suivants :2365 (39D), 456 (1C8), 875 (36B),

II.3.Hexadécimal-Binaire

Ces deux systèmes de numération sont très proches l'un de l'autre. En effet, 4 bit correspondent à un chiffre hexadécimal.

- 10 16 2
- 0 0 0000
- 1 1 0001
- 2 2 0010
- 3 3 0011
- 4 4 0100
- 5 5 0101
- 6 6 0110
- 7 7 0111
- 8 8 1000
- 9 9 1001
- 10 A 1010
- 11 B 1011
- 12 C 1100
- 13 D 1101
- 14 E 1110
- 15 F 1111

Pour passer d'un nombre hexadécimal en binaire, il suffit de remplacer chaque chiffre par sa valeur en binaire. Par exemple : $A7=1010 0111 b. Attention : il ne faut pas oublier les 0 !

Exercice : Transformer en binaire les nombres hexadécimaux suivants : 7A4D, 35FE…

Le passage de binaire en décimal s'obtient en regroupant les bits 4 par 4 en partant de la droite. Il reste ensuite à trouver le code hexadécimal pour chaque groupe de 4.

Exercice : Transformer en hexadécimal les nombres binaires suivants :…

III.Opérations

III.1.Addition

Ca fonctionne comme en décimal. La seule difficulté provient de ce que l'on n'apprend pas la table d'addition en hexadécimal. F+D=1C par exemple. Il faut donc réfléchir un peu plus qu'en décimal.

Exercice :

- Effectuer les additions suivantes en hexadécimal : 1F4+A2D (C21), 125+298 (3BD), ABC+BCD (1689)…
- Effectuer les additions suivantes en binaire : …

III.2.Soustraction

III.2.1.Directe

Ca fonctionne comme en décimal. La seule difficulté provient de ce que l'on n'apprend pas la table de soustraction en hexadécimal. D-6=8 par exemple. Il faut donc réfléchir un peu plus qu'en décimal.

Exercice :

- Effectuer les soustractions suivantes en hexadécimal : 5D-25 (38), 62-23 (3F), D123-1FCB (B158)…
- Effectuer les soustractions suivantes en binaire : 1101-101 (1000), 10001-1111 (10)…

III.2.2.Par le complément

A - B = A + (-B) = A + Cv(B)

- (1) A > B : A = B + R
  A - B = B + R + Cv(B) = 2^n + **R**
- (2) A = B : même cas que précédemment avec R = 0
- (3) A < B : A = B - R
  A - B = B - R + Cv(B) = 2^n - R
  Or, E + Cv(E) = 2^n donc 2^n - E = Cv(E)
  Donc A - B = Cv(E) :
  => on complémente pour avoir la valeur absolue du résultat.
  (méthode utilisée dans les processeurs)

Exercice :

- Quelle plage de nombres peut-on coder sur 4 bits avec la convention de signe précisée au § I.I.2 ? (-8 à +7)
- Effectuer les différences suivantes en binaire sur 4 bits : 5-3 (cas 1), 3-5 (cas 3), 6-6 (cas 2)…
- Quel est l'intérêt de la méthode du complément ? (marche pour 3-5)

Exemples de soustractions avec le complément (sur 4 bits) :

5-3 : A = 5 = 0101
B = -3 : 3 = 0011 => 1100+1 = 1101 = -3

0101	A	
1101	B	
(1)0010	(1) : A>B	=> 2

3-5 : A = 3 = 011
B = -5 : 5 = 0101 => 1010+1 = 1011 = -5

0011	A	
1011	B	
(0)1110	(0) : A<B	0001+1 = 2 => -2

-2-3 : A = -2 : 2=0010 => 1101+1 = 1110 = -2
B = -3 : 3 = 0011 => 1100+1 = 1101 = -3

1110	A	
1101	B	
(1)1011	1 : signe OK	0100+1 = 0101 => -5

-5-4 : A = -5 : 5 = 0101 => 1010+1 = 1011 = -5
B = -4 : 4 = 0100 => 1011+1 = 1100 = -4

1011	A	
1100	B	
(1)0111	0 : signe ~~OK~~	0111+1 = 1001 => -9